Annales : Arithmétique élémentaire

I) Sommes de diviseurs [Olympiades 2021]

On rappelle qu'on nombre entier m est un multiple d'un nombre entier d s'il existe un nombre entier q tel que $m = dq$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un diviseur de m. Ce vocabulaire ne s'utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d'un entier n.

1. Quels sont les diviseurs de 6 ? de 101 ? de 361 ? de 2 021 ?

À tout nombre entier naturel non nul n, on associe le nombre $N(n)$ et la somme $S(n)$ de ses diviseurs.

3. Pour chacun des nombres $6, 101, 361, 2\,021$ vérifier l'inégalité $\quad 2S(n) \leq (n+1)N(n)$

4. À tout diviseur d d'un entier n non nul on associe l'entier q tel que $n = dq$. Si les diviseurs de n sont $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{N(n)-1}, n$, on note respectivement $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{N(n)-1}, 1$ les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus.

a) Évaluer la somme $T(n) = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{N(n)-1} + n + q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{N(n)-1} + 1$.

b) Si a et b sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que $\quad a + b < ab + 1$

c) En déduire, pour des nombres d et q tels que dq = n, l'inégalité $\quad d + q \leq n + 1$.

d) En déduire finalement que l'inégalité $\quad 2S(n) \leq (n+1)N(n) \quad$ est réalisée pour tout entier naturel n non nul.

5. **a)** Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l'égalité $\quad 2S(n) = (n+1)N(n) \quad (*) \quad$ n'est réalisée que si, pour chacun des diviseurs d de n, l'égalité $d + q = n + 1$ est réalisée.

b) En déduire que seuls 1 et les nombres premiers peuvent satisfaire l'égalité $(*)$.

c) La réciproque est-elle vraie ?

II) Superbes suites [CG 2013]

Dans ce problème, on considère des suites finies $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'entiers strictement positifs, où $n \geq 2$ est un entier, appelé longueur de la suite finie.

On dit qu'une suite finie d'entiers strictement positifs est superbe si chacun de ses termes divise la somme de tous les termes.

Par exemple, la suite $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$ est superbe de longueur 8 car $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 12$, qui est divisible par 1 et par 2 ; la suite $(3, 3, 6, 12)$ est superbe de longueur 4 car la somme des termes vaut 24, qui est multiple de 3, 6, 12.

1. Déterminer les entiers strictement positifs b tels que la suite $(21, 7, b)$ soit superbe.

2. **a)** Déterminer les suites superbes de longueur 2, puis celles de longueur 3.

b) Déterminer les suites superbes de longueur 4 et dont la somme des termes vaut 2013.

3. **a)** Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe une suite superbe de longueur n dont les termes sont tous distincts.

b) Montrer que, si $n \geq 2$, il n'existe pas de suite superbe de longueur n dont les termes sont des nombres premiers distincts.

4. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une suite arithmétique de raison strictement positive. Montrer que si cette suite est superbe alors $n = 3$.

5. On dit qu'une suite (infinie) $(a_k)_{k\geq 1}$ d'entiers strictement positifs est magnifique si, pour tout entier $n \geq 2$, la suite finie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est superbe. Déterminer les suites magnifiques $(a_k)_{k\geq 1}$ vérifiant $a_k < a_{k+1}$ pour tout entier $k \geq 2$.

6. Soit $n \geq 4$ et soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une suite finie, pas forcément superbe, d'entiers strictement positifs tous distincts.

a) Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe.

b) Montrer qu'il est possible de prolonger la suite de façon à obtenir une suite superbe dont les termes sont tous distincts.

III) Appoint monétaire [TFJM 2023]

Le petit prince achète des marguerites sur des planètes où l'on ne rend pas la monnaie. Chaque planète possède un système monétaire $S \subset \mathbb{N}^*$, ensemble des valeurs de ses pièces, avec $1 \in S$. Il y convertit une somme $x \in \mathbb{N}$, sans choisir les pièces reçues.

On note $A_S(x)$ l'ensemble des prix pour lesquels il est sûr d'avoir l'appoint, quelle que soit la répartition des pièces de valeur totale x qu'il reçoit.

Par exemple, pour $S = \{1, 2, 5\}$ et $x = 4$, il peut recevoir deux pièces de 2, une pièce de 2 et deux de 1, ou quatre pièces de 1. Ainsi, $A_{\{1,2,5\}}(4) = \{0, 2, 4\}$.

1. Pour $S = \{1, 3, 10\}$, déterminer les prix pour lesquels le petit prince est sûr d'avoir l'appoint si :

a) $x = 10$; **b)** $x = 100$; **c)** $x = 10^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Un prix $p \geq 1$ est dit *S-primaire* si $A_S(p) = \{0, p\}$. On note $\mathcal{P}_S$ l'ensemble de ces prix ; par convention, 0 n'est jamais S-primaire.

Par exemple, pour $S = \{1, 2, 5\}$, le prix 4 n'est pas S-primaire, puisque l'appoint pour 2 est garanti. Le prix 6 l'est : les répartitions $6 = 5 + 1 = 2 + 2 + 2$ montrent qu'aucun prix entre 1 et 5 n'est garanti. Ainsi, $1, 2, 5, 6 \in \mathcal{P}_{\{1,2,5\}}$, mais $0, 3, 4 \notin \mathcal{P}_{\{1,2,5\}}$.

2. Quels sont les prix S-primaires si : **a)** $S = \{1, u\}$ pour un entier $u \geq 2$? **b)** $S = \{1 + 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des nombres impairs ? **c)** $S = \{2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des puissances de 2 ? **d)** $S = \{1, v, w\}$ pour des entiers $2 \leq v < w$? **e)** S est l'ensemble des nombres premiers ou égaux à 1 ?

3. Déterminer l'ensemble des parties S de $\mathbb{N}^*$ telles que $\mathcal{P}_S$ est fini.